# 27 Intégrales à paramètre

## 27.A Questions de cours :

1. Définir valeur propre, vecteur propre et élément propre.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité.
3. Énoncer le théorème du rang

## 27.B Exercices :

**Exercice 1: **** Régularité de la fonction $\Gamma$**

On définit la fonction $\Gamma$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt, \quad \text{pour x} > 0.$$

1. Montrer que la fonction $\Gamma$ est bien définie.
2. Montrer que la fonction $\Gamma$ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que la fonction $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]0, +\infty[$.
4. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

**Exercice 2: *** Transformée de Fourier de la Gaussienne**

On définit la Gaussienne par la fonction $g$ suivante :

$$g(x) = e^{-ax^2}$$

où $a$ est un paramètre réel strictement positif.
Calculer $f(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x$.

(*Indication : on déterminera une équation différentielle vérifiée par* $f$.)

**Exercice 3: * Convergence dominée 1**

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \geq 1$, on a $|f_n(x)| \leq 1$.
2. En déduire $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 nx(1-x)^n \, dx$.

**Exercice 4: *** Fonction $\Gamma$ et sa formule de Gauss**

Soit la fonction $\Gamma$ définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, dt.$$

1. Montrer que la fonction $\Gamma$ est bien définie.
2. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.
3. En introduisant $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \, dt$, démontrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! \, n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

   On admettra que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$ si on n'a pas encore vu le cours de convexité.

## Exercice 5: * Convergence dominée 2

Soit la suite de fonction dénie de la manière suivante :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x = 0$.

## Exercice 6: ** Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable.

1. Démontrer que pour tout $A > 0$ l'intégrale $\int_0^A f(t)\cos(xt)\ \ \mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.
2. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\cos(xt)\ \ \mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.

## Exercice 7: *** Première application usuelle de Riemann-Lebesgue

1. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que $\int_a^b g(t)\sin(nt)\ \ \mathrm{d}t \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux intégrable. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(nt)\ \ \mathrm{d}t \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$.

## Exercice 8: * Suites de Riemann et intégrales

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ continue et croissante. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$.

1. On suppose que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. Montrer que la suite $(S_n)$ converge vers $\int_a^b f(t)\,dt$.
2. On suppose que $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge. Montrer que la suite $(S_n)$ tend vers $+\infty$.

## Exercice 9: Fonctions spéciales usuelles

1. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme dans le cas positif
2. Montrer que la fonction $\zeta$ de la variable $s$ donnée par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

   est indéfiniment dérivable sur son domaine de définition.
3. Soit $a$ un réel strictement positif.
   Calculer $f(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-ax^2}\ \ \mathrm{d}x$ en fonction de $f(0)$.

   (*Indication : on déterminera une équation différentielle vérifiée par* $f$.)